2O09

トポロジカルインデックスと整数論.II

細矢治夫

お茶の水女子大学（名誉教授）

1. はじめに

今年の春の年会では、筆者が 1971 年に提出したトポロジカルインデックス Z（TopIx Z と略称）が初等数学、特に整数論の基本的諸概念や問題と密接な関係のあることの紹介をした。そこでは主に、ペル方程式、ピタゴラスの三角形、連分数等について説明した。今回は、ヘロンの三角形とディオファントスの１次の不定方程式について紹介する

その前に、初等数学のどのような面にこの TopIx が効力を発揮するかを表１に挙げておく。

表１．TopIx Z が関係する初等数学、整数論の諸問題

フィボナッチ数、ルカ数	その数学的意味付け
ペル数	その数学的意味付け
パスカルとルカの三角形	その図形的意味
ピタゴラスの三角形	分類、系統樹
	毛虫グラフ、平方根の有理数近似
ヘロンの三角形	分類、系統樹
ペル方程式	最速解法
オイラーの連分多項式	最速解法
連分数	漸化式の発見
ディオファントスの不定方程式	新解法の発見

2. ヘロンの三角形

三角形の３辺を (a, b, c) とすると、その面積が

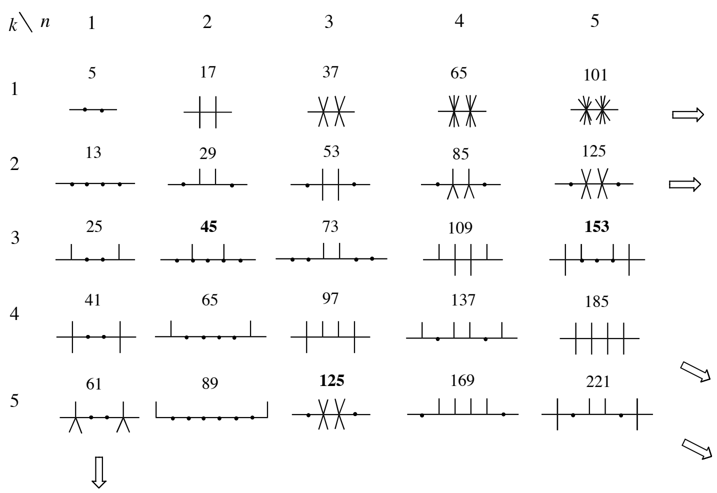
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と表されるのがヘロンの公式で、この Δ が整数になる三角形をヘロンの三角形 (HeT)と呼ぶ。三辺が整数の直角三角形をピタゴラスの三角形 (PyT) と呼ぶが、その面積は全て整数となるので、(3, 4, 5) の特別なもの以外の PyT は HeT には入れない。また、三辺が共通因子をもたないものを既約 (primitive)であるというが、ここでも primitive Heronian triangle (pHeT) を主に扱う。しかし、若干の既約でないものも必要に応じてその仲間に加える。

２千年以上の歴史をもちながら、HeT は PyT ほど詳しくは研究されていない。その主な原因は、HeT をきちんと同定する戸籍番号の整備がなされていなかったためであると筆者は考え、先ずその分類整理から始めた。HeT には、1) 二等辺 (a, b, b)、2) 擬二等辺 $(a, b, b+1)$、3)三辺が等差数列をなす arithmetic HeT 等

がある。

先ず 1)について調べると、$2a-b$ の値が $(2n)^2$ か $2(2n-1)^2$ かによってＩ群とII群に分けられることが分かった。しかも、１対の自然数からなる戸籍コード (n, k) を選ぶと、a と Δ が共通、b だけが異なるＩ群とII群の piHeT（既約二等辺 HeT）が一つずつ定まることが分かり、更に a、b、Δ の一般式と漸化式が得られた。更に、a の値を TopIx にもつグラフ（Z–グラフ）が、下図のように規則的に成長するいくつかの系列グラフになることも分かった。



また、3)の中で、３辺の公差が１になる arithmetic HeT の Z–グラフが、一定の規則で成長する毛虫グラフの系列をつくることは、既に前回報告したが、公差が１以外の arithmetic HeT の Z–グラフもそれぞれ規則的なグラフの系列をつくることが今回分かった。

3　ディオファントスの不定方程式の TopIx による解法の発見

次のような線形のディオファントスの不定方程式、

$lx - my = 1$　　（l と m は既約な整数、x と y の整数解を求める）

は２千年の歴史をもち、その解法のアルゴリズムもよく知られている。ところが、前回紹介した毛虫グラフの TopIx を利用することによって、上の方程式を図式的に容易に解く方法が発見された。更に、これの従来の解法に密接な関係をもつ l/m の連分数やその他の数値が全て l と m から生じる毛虫グラフに関連する TopIx で表されることが示された。

この他、整数論の諸問題の解法に重要な働きをする TopIx の役割について紹介する。

参考文献

細矢治夫, トポロジカルインデックスと整数論, SCCJ 春季年会 (2009).

E. W. Weisstein, CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2003).

R. H. Buchholz, PhD Thesis, Univ. of Newcastle (1989).